Anhang - Übungsaufgaben Mathe A

Quelle: Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler - Sydsaeter, Hammond
Pearson Studium - 3. aktualisierte Auflage - 2008

1. Zeigen Sie, dass
$$R(x) = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c(cx+d)} \qquad (c \neq 0)$$

2. Betrachten Sie die Förderung aus einer Ölquelle. Sei $x(t)$ die Förderungsrate pro Tag und $p(t)$ der Preis in Euro pro Barrel zur Zeit t. Dann ist $R(t) = p(t)x(t)$ der Ertrag in Euro pro Tag. Bestimmen Sie einen Ausdruck für $\dot{R}(t)$ und geben Sie eine ökonomische Interpretation für den Fall, dass $p(t)$ und $x(t)$ beide monoton steigend sind. (Hinweis: $R(t)$ steigt aus zwei Gründen...)

3. (a) Bezugnehmend auf Beispiel 10.3.2. nehmen wir an, dass der Marktwert eines Baumes $P(t) = 100e^{\sqrt{t}/2}$ ist, so dass sein Barwert $f(t) = 100e^{\sqrt{t}/2}e^{-rt}$ ist. Bestimmen Sie die optimale Fällzeit t^*. (Beachten Sie, dass t^* fällt, wenn r steigt.) Zeigen Sie durch Untersuchung des Vorzeichens von $f'(t)$, dass Sie tatsächlich das Maximum gefunden haben. Wie groß ist t^*, wenn $r = 0.05$ ist?
(b) Lösen Sie dasselbe Problem, wenn $P(t) = 200e^{-1/t}$ und $r = 0.04$ ist.

4. Eine Person habe die Nutzenfunktion: $u(x, y) = 100xy + x + 2y$. Nehmen Sie an, dass der Preis pro Einheit des ersten Gutes gleich 2 Euro und des zweiten Gutes gleich 4 Euro ist. Die Person erhält 1000 Euro, die alle für die zwei Güter auszugeben sind. Lösen Sie das Nutzenmaximierungsproblem.

5. Es wird als sicher angenommen, dass der Minimalwert existiert. Lösen Sie das Minimierungsproblem.
$$\min \quad \ln(2+x^2) + y^2 \quad \text{s.t.} \quad x^2 + 2y = 2$$

6. Betrachten Sie Das Nutzenmaximierungsproblem (14.1.3) mit einer separierbaren Nutzenfunktion $u(x, y) = v(x) + w(y)$, wobei $v'(x) > 0$, $w'(y) > 0$, $v''(x) \leq 0$ und $w''(y) \leq 0$.
(a) Stellen Sie die Bedingungen erster Ordnung für die Nutzenmaximierung auf.
(b) Warum sind diese Bedingungen auch hinreichend für Optimalität?

7. (a) Betrachten Sie das folgende nichtlineare Programierungsproblem. Dabei sind r und m positive Konstanten mit $m > 1$. Geben Sie die notwendigen Kuhn-Tucker-Bedingungen für eine Lösung (x^*, y^*) an.

$$\max \quad xy \quad \text{unter} \begin{cases} x^2 + ry^2 \leq m \\ x \geq 1 \end{cases}$$

(b) Lösen Sie das Problem.

8. Lösen Sie das folgende Problem:

$$\max(\min) \quad \ln x + y \quad \text{s.t.} \quad x^2 + 3xy + 3y^2 = 3$$