**Klaus2TerminWS13/14**

**1) Differenzengleichung**

Gegeben $x_0, x_1, \ldots$ als Lösungen der Gleichungen

$$\begin{aligned} &x_{n+1} = a x_n \quad \text{für} \quad n = 1, 2, \ldots \\ &x_0 = A \end{aligned}$$

**a)** für gegebene Werte von $a, A$ finden Sie $x_3$ und $x_{30}$

*Lösung (4 Punkte):*

$$x_n = A a^n \implies \begin{array}{ll} x_3 = A a^3 & \text{(3 Punkte)} \\ x_{30} = A^{30} & \text{(1 Punkt)} \end{array}$$

**b)** finden Sie $a, A$ unter der Bedingung $x_2 = 15$, $x_{30} = 10$

*Lösung (6 Punkte):*

$$\left.\begin{array}{l} x_2 = A a^2 = 15 \\ x_{30} = A a^{30} = 10 \end{array}\right\} \implies \tfrac{x_2}{x_{30}} = 1.5 = a^{-28} \implies$$

$a^{28} = 2/3 \implies \boxed{a = (2/3)^{1/28}} = 0.985\,62$ (4 Punkte) und $\boxed{A = 15/a^2}$ $= 15\,(3/2)^{1/14} = 15.\,441.$(2 Punkte) check:
$x_2 = Aa^2 = 15 = 15.\,441\,(0.985\,62)^2 = 15.0$

**c)** *Für* $a = 1.01$ *und* $A = 1$ :

finden Sie den kleinsten Wert von $n$ so dass $\sum_{i=0}^{n} x_i > 10\,000$. Begründen Sie ihre Antwort mathematisch. Sie brauchen diesen Wert nicht mit einem Taschenrechner auszurechnen.

*Lösung (10 Punkte):*

$\sum_{i=0}^{n} x_i = A \sum_{i=0}^{n} a^i > 10000$ (1 Punkt)
$\sum_{i=0}^{n} x_i = A \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$ (4 Punkte)
$\implies$ löse $A \frac{a^{n+1}-1}{a-1} = 10000$ (2 Punkte)
$\implies a^{n+1} = 1 + \frac{c}{A}(a-1) \implies (n+1)\ln a = \ln\left(1 + \frac{c}{A}(a-1)\right) \implies$

$$\boxed{n = \frac{\ln\left(1+\frac{c}{A}(a-1)\right)}{\ln a} - 1} = \frac{\ln\left(1 + 10^4\,(0.01)\right)}{\ln 1.01} - 1 = 462.\,82 \text{ (2 Punkte)}$$

$n_{\min} =$ (grösste_ganze_zahl_kleiner_als $n$)+1 = 463 (1 Punkt)
check: $\sum_{i=0}^{462} (1.01)^i = 9918.\,3$ und $\sum_{i=0}^{463} (1.01)^i = 10019$

**2) Grenzwerte:**

Bestimmen Sie, welche der Grenzwerte existieren und welche nicht (mit Begründung)

**a)**

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{x}$$

*Lösung (5 Punkte):*

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{x}=e^{\alpha}$$

wer das nicht in seiner formalSammlung hatte is selber schuld. versuche mit einer nicht existenten regel $\lim\left(f(x)^{g(x)}\right)=\lim f(x)^{\lim g(x)}$ oder ähnlichem sind sinnlos, sowohl in a) als auch in b)

**b)**

$$\lim_{x\to 0}(1-\alpha x)^{\frac{1}{x}}$$

wer hier noch mal das gleich spiel wie in a) versuchte hat höchstens noch mal ein oder zwei punkte wegen folgefehlers bekommen.

*Lösung (5 Punkte):*

$$\lim_{x\to 0}(1-\alpha x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{\alpha}{x}\right)^{x}=e^{-\alpha}$$

**c)**

$$\lim_{x\to a}\frac{|x|-|a|}{x-a}$$

für $a=-1,0,1$

*Lösung (10 Punkte):* Fall $a=1$ (3 Punkte)

$\Longrightarrow:\lim_{x\to a}\frac{|x|-|a|}{x-a}=\lim_{x\to 1}\frac{|x|-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}1=1$

n.b. sie hätten auf die unberstimmte form 0/0 die l'Hospital regel anwenden können und noch ein paar rechenfehler einhandeln.

Fall $a=-1$ (3 Punkte)
$\lim_{x\to a}\frac{|x|-|a|}{x-a}=\lim_{x\to -1}\frac{|x|-1}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{-x-1}{x+1}=\lim_{x\to -1}(-1)=-1$

Fall $a=0$ (4 Punkte)

$\Longrightarrow\ \lim_{x\to a}\frac{|x|-|a|}{x-a}\ \Longrightarrow\ \lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}=\begin{cases}1 & \text{für } x>0\\ -1 & \text{für } x<0\end{cases}$

also, der limes existiert nicht! wer hier noch mit l'Hospital weiterwursteln wollte hat sich jetzt aber die finger verbrannt, denn die funktion $|x|$ ist in 0 nicht ableitbar.

**3) Taylor Approx:**
Gegeben die Funktion

$$f(x) = \int \frac{e^x}{1+e^x} dx$$
$$f(0) = 0$$

finden Sie die Taylor approximation 2. grades von $f(x)$ in $x_0 = 0$. (Hinweis: sie brauchen das Integral nicht notwendiger weise auszurechnen)

*Lösung (20 Punkte):*

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2, \text{ (2.5 Punkte)}$$

$$f(0) = 0 \text{ (2.5 Punkte)}$$

$$\frac{d}{dx} \int \frac{e^x}{1+e^x} dx = \frac{e^x}{e^x+1} \implies f'(0) = 0.5 \text{ (5 Punkte)}$$

$$\frac{d}{dx} \frac{e^x}{e^x+1} = \frac{e^x}{(e^x+1)^2} \implies f''(0) = 0.25 \text{ (5 Punkte)}$$

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!} f''(0)x^2 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 \text{ (5 Punkte)}$$

*Lösung (alternative) (20 Punkte):* finde integral

$$f(x) = \int \frac{e^x}{1+e^x} dx = \ln(e^x + 1) + C$$

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ &= \ln\left(e^0 + 1\right) + C \\ &\implies C = -\ln\left(e^0+1\right) = -\ln(2) \end{aligned}$$

$\implies$

$$f(x) = \ln(e^x + 1) - \ln\left(e^0 + 1\right) = \ln(e^x + 1) - \ln(2)$$

$\implies$

$$f'(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$$

$$\implies$$

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right) = \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$$

$\implies$

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)\,x + \frac{1}{2!} f''(0)\,x^2 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2$$

**4) Differentiale:**

Gegeben die Gleichung

$$x^2y^2 - x\sqrt{y}t = 2$$

a) um welchen Betrag ändert sich ungefähr $y$ wenn sich $x$ um $dx$ und $t$ um $dt$ erhöht ?

*Lösung (16 Punkte):*

$F(x,t,y) = x^2y^2 - x\sqrt{y}t$
$\Longrightarrow$
$dF(x,t,y) = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial t}dt + \frac{\partial F}{\partial y}dy$

$dF(x,t,y) = 2xy^2dx - \sqrt{y}t\ dx - x\sqrt{y}dt + 2yx^2dy - 0.5\ xy^{-0.5}t\ dy$

$= \left(2xy^2 - \sqrt{y}t\right)\ dx - x\sqrt{y}dt + \left(2yx^2 - 0.5\ xy^{-0.5}t\right)\ dy = 0$
$\Longrightarrow$

$$dy = -\frac{\left(2xy^2 - \sqrt{y}t\right)\ dx - x\sqrt{y}dt}{2yx^2 - 0.5\ xy^{-0.5}t}$$

b) approximieren sie den Wert für $y$ wenn $x = 2.01$, $t = 0.99$

*Lösung (4 Punkte):*

$$\left.\begin{array}{l} x = 2.0,\ t = 1.0 \\ x^2y^2 - x\sqrt{y}t = 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow y = 1$$

$\Longrightarrow dx = 0.01,\ dt = -0.01$

$$dy = -\frac{(4-1)\ dx - 2dt}{8-1} = -\frac{3\,(0.01) + 0.02}{8-1} = \frac{0.05}{7} = 7.1429 \times 10^{-3}$$

**5) Tangenten:**
Gegeben die Kurvenschar

$$f(x,y,c) = x^2 + y^2 - 2x = c$$

und die Kurve

$$g(x,y) = x^2 + 4y^2 - 16 = 0$$

**a)** Finden Sie mindestens einen Punkt $(x_0, y_0)$ an dem die Tangente einer Kurve der Schar $f$ gleich der Tangente der Kurve $g$ ist.

*Lösung (20 Punkte):*
steigung der tangente an die 1.kurve:
$f(x,y,c) = x^2 + y^2 - 2x - c = 0 \implies \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \implies \frac{dy}{dx} = -\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right/\frac{\partial f}{\partial y}$

steigung der tangente an die 2.kurve:
$g(x,y) = x^2 + 4y^2 - 16 = 0 \implies \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \implies \frac{dy}{dx} = -\left.\frac{\partial g}{\partial x}\right/\frac{\partial g}{\partial y}$
$\implies$

$$\boxed{\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right/\frac{\partial f}{\partial y} = \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right/\frac{\partial g}{\partial y}}$$

so weit sollte jeder kommen ($\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$, $\frac{\partial g}{\partial y} \neq 0$) (8 Punkte)

angenommen: $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$, $\frac{\partial g}{\partial y} \neq 0$ (wir sollen ja nicht alle Lösungen finden)

$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right/\frac{\partial f}{\partial y} = \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right/\frac{\partial g}{\partial y} \implies \boxed{\frac{2x-2}{2y} = \frac{2x}{8y}}$ wenn $y \neq 0$ (4 Punkte)
$\implies$
Lösung:

$$\frac{2x-2}{2y} = \frac{2x}{8y} \implies \frac{x-1}{y} = \frac{x}{4y} \implies 4x - 4 = x \implies x = 4/3$$
$$g(x,y) = x^2 + 4y^2 - 16 = 0$$

wer gesehen hat dass man die erste gleichung nicht ohne die 2. lösen konnte hat noch mal (4 Punkte) kassiert
$\implies 16 = 16/9 + 4y^2$, Lösung ist: $\frac{4}{3}\sqrt{2}, -\frac{4}{3}\sqrt{2}$ (4 Punkte)

$$\boxed{(x,y) = \left(4/3, \pm\frac{4}{3}\sqrt{2}\right)}$$

und hier was für taschenRechnerFans: $\boxed{(x,y) = (1.3333,\ 1.8856)}$

Bemerkung: Wir wissen dass im Maximum die Höhenlinie der Zielfunktion und die Kurve der NB tangential zueinander sind. Das führt zu folgender *alternative Lösung: (*Einige sind darauf gekommen, was kein wunder ist, wurde ja in der vorlesung so besprochen).*(20 Punkte).*

Benutze die Methode der Lagrange Multiplikatoren (**Section 14.4: Warum die Methode der Lagrange-Multipliatoren funktionert**)

Problem:

$$\begin{aligned} \max\ x^2 + y^2 - 2x + 1 \\ \text{NB} : x^2 + 4y^2 = 16 \end{aligned}$$

die funktion $z = x^2+y^2-2x+1$ ist eine fläche, im $xyz$-raum, ihre höhenlinien $x^2+y^2-2x = c$ sind kurven in der $xy$-ebene, die funktion $x^2+y^2-2x+1$ hat ihr maximum in $(x_0, y_0)$wo höhenlinien und $x^2+4y^2 = 16$ einander tangential sind. in demselben tangentialpunkt hat natürlich auch die funktion $x^2+y^2-2x$ ihr maximum. Also kann man den tangential punkt $(x_0, y_0)$ in demselben punkt in dem das optimisierungsproblem gelöst wird.

$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - c = 0$
$g(x, y) = x^2 + 4y^2 - 16 = 0 \implies$

$$\boxed{\begin{array}{c} \frac{\partial f}{\partial x} - \lambda\frac{\partial g}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} - \lambda\frac{\partial g}{\partial y} = 0 \\ g = 0 \end{array}} \implies \left\{ \begin{array}{l} 2x - 2 = 2\lambda x \\ 2y = 8\lambda y \\ x^2 + 4y^2 = 16 \end{array} \right.$$

(8 Punkte+4 Punkte) $\implies$

Lösung ist: $(x, y) = \left(4/3, \pm\frac{4}{3}\sqrt{2}\right)$ Aufgabe 14.3#2a (8 Punkte)

alternative Lösung ist: $(x, y) = (-4, 0)$ Aufgabe 14.3#2a