

Klausur 2.Termin WS13/14

1) Differenzengleichung

Gegeben seien x_0, x_1, \dots als Lösungen der Gleichungen

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= ax_n \quad \text{für } n = 1, 2, \dots \\x_0 &= A\end{aligned}$$

a) Für gegebene Werte von a, A , finden Sie x_3 und x_{30} .

b) Finden Sie a, A unter der Bedingung, dass $x_2 = 15$ und $x_{30} = 10$ gilt.

c) Für $a = 1.01$ und $A = 1$:

Finden Sie den kleinsten Wert von n so dass $\sum_{i=0}^n x_i > 10\,000$ gilt. Begründen Sie ihre Antwort mathematisch. Sie brauchen diesen Wert nicht mit einem Taschenrechner auszurechnen.

2) Grenzwerte:

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte, falls sie existieren. Begründen Sie auch Ihre Antwort, falls ein Grenzwert nicht existiert.

a)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^x$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \alpha x)^{\frac{1}{x}}$$

c)

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{|x| - |a|}{x - a}$$

für $a = -1, 0, 1$

3) Taylor Approximation:

Gegeben die Funktion

$$\begin{aligned}f(x) &= \int \frac{e^x}{1 + e^x} dx \\f(0) &= 0\end{aligned}$$

Finden Sie die Taylor Approximation 2. Grades von $f(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$. (Hinweis: Sie brauchen das Integral nicht notwendigerweise auszurechnen)

4) Differentiale:

Gegeben sei die Gleichung

$$x^2 y^2 - x\sqrt{y}t = 2$$

a) Um welchen Betrag ändert sich ungefähr y , wenn sich x um dx und t um dt erhöht ?

b) Approximieren Sie den Wert für y wenn $x = 2.01$ und $t = 0.99$ gilt.

5) Tangenten:

Für $-\infty < c < \infty$ sei eine Kurvenschar gegeben, die durch die Gleichung

$$f(x, y) = c \tag{1}$$

mit

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x$$

definiert ist.

Ausserdem sei eine weitere Kurve gegeben, die durch die Gleichung

$$g(x, y) = x^2 + 4y^2 - 16 = 0 \tag{2}$$

definiert ist.

a) Finden Sie eine Gleichung für Punkte (x_0, y_0) in denen die Steigung der Tangente an eine beliebige Kurve der Schar (1) gleich der Steigung der Tangente an die Kurve der Gleichung (2) ist.

b) Finden Sie Lösungen (x_0, y_0) der Gleichung aus a)