Klaus1TerminWS13/14

1) Approximation:

a) Approximieren Sie die Funktion $f(x) = \log_a x$ durch ein Polynom 1. Grades in einer Umgebung von x_0.
Hinweis: $\log_a(x) = \log_a\left(e^{\ln x}\right) = \ln x \log_a(e) = c_0 \ln x,\ c_0 = \log_a(e)$

Lösung (4 Punkte):

$$f(x) = \log_a(x) = c_0 \ln x \implies f'(x) = \frac{c_0}{x}$$

$\implies$

$$\log_a(x) \approx \log_a(x_0) + \frac{c_0}{x_0}(x - x_0)$$

b) Finden sie eine *rechentechnisch günstige* Approximation von $\log_{10} 111$ durch ein Polynom 1. Grades (Sie brauchen die numerische Berechnung nicht auszuführen) $\log_{10}(e) \approx 0.4$

Lösung (5 Punkte): $111 = 100 + 11$, $\log_{10} 100 = 2$

$$\implies \log_{10}(111) \approx \log_{10}(100) + \frac{1}{100} c_0 (x - 111) = 2 + c_0 \frac{11}{100} = 2 + \frac{4}{10}\frac{11}{100} = \frac{511}{250} \approx 2.044$$

Hier hat es keinen Sinn den log in 111 zu entwickeln weil wir diesen Wert ja gerade nicht kennen und deshalb approximieren wollen durch einen anderen wert wo wir sie kennen, also in 100.

c) Finden sie eine Approximation von $\log_a x$ in x_0 durch ein Polynom 3. Grades

Lösung (5 Punkte):

$$\begin{aligned} f(x) &= \log_a(x) = c_0 \ln x \\ &\implies f'(x) = \frac{c_0}{x} \\ &\implies f''(x) = (-1)\frac{c_0}{x^2} \\ &\implies f'''(x) = 2\frac{c_0}{x^3} \end{aligned}$$

$\implies$

$$\log_a(x) \approx \log_a(x_0) + \frac{c_0}{x_0}(x - x_0) - \frac{1}{2}\frac{c_0}{x_0^2}(x - x_0)^2 + \frac{1}{3}\frac{c_0}{x_0^3}(x - x_0)^3$$

d) schreiben Sie die Approximation in x_0 durch ein Polynom des grades n für $f(x) = \log_a(x)$ ($\sum$ −Schreibweise nicht erforderlich)

Lösung (6 Punkte):

$$\begin{aligned} f(x) &= \log_a(x) = c_0 \ln x \\ &\Longrightarrow f'(x) = \frac{c_0}{x} \\ &\Longrightarrow f''(x) = (-1)\frac{c_0}{x^2} \\ &\Longrightarrow f'''(x) = 2\frac{c_0}{x^3} \\ &\Longrightarrow f^{(4)}(x) = (-1)(3)(2)\frac{c_0}{x^3} \\ &\Longrightarrow ... \\ &\Longrightarrow f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} c_0 \frac{(n-1)!}{x^n} \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$

$$\log_a(x) \approx \log_a(x_0) + \frac{c_0}{x_0}(x-x_0) - \frac{1}{2}\frac{c_0}{x_0^2}(x-x_0)^2 + \frac{1}{3}\frac{c_0}{x_0^3}(x-x_0)^3 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}\frac{c_0}{x_0^n}(x-x_0)^n$$

---

2) Limes: Bestimmen Sie folgenden Limes

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x e^{t^2} dt}{\sqrt{x}}$$

Lösung (12 Punkte):

In dieser Aufgabe wurden hauptsächlich bekannte Eigenschaften der Integralrechnung sowie der Satz von L'Hospital abgefragt. Hier eine sehr umfangreiche Schritt-für-Schritt Lösung.

(Vorbetrachtung: Hier ist offensichtlich, dass in der Umgebung von 0 *die Funktion* $f(t) := \exp(t^2)$ *nicht nur stetig sondern auch beschränkt ist und somit die Stammfunktion* $F(x) := \int_0^x \exp(t^2)\, dt$ *für jede Zahl* x *in der Umgebung von 0 existiert)*

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass das Integral über einen einzelnen Punkt immer 0 ergibt. Hier also mit $F(x) := \int_0^x \exp(t^2)\, dt$:

$$\lim_{x\to 0} F(x) = F(0) = \int_0^0 \exp(t^2)\, dt = 0.$$

Andererseits gilt natürlich auch mit $g(x) := \sqrt{x}$:

$$\lim_{x \to 0} g(x) = g(0) = 0.$$

Wir haben also somit ein L'Hospitalproblem des Typens $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x \exp(t^2)\, dt}{\sqrt{x}} = \lim_{x \to 0} \frac{F(x)}{g(x)} = \frac{\text{“0”}}{\text{“0”}}.$$

Benötigt werden für die Anwendung von L'Hospital die Ableitungen von $F(x)$ und $g(x)$:
$F'(x)$, die Ableitung des Integrals nach seiner Obergrenze, ist nach den bekannten Rechenregeln für Integrale einfach der Integrand $f(t) := \exp(t^2)$ an der Stelle x ausgewertet, also:

$$F'(x) = f(x) = \exp(x^2).$$

Die Ableitung von $g(x)$ lautet hingegen

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Insgesamt gilt also:

$$\lim_{x \to 0} \frac{F(x)}{g(x)} = \frac{\text{“0”}}{\text{“0”}} = \lim_{x \to 0} \frac{F'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\exp(x^2)}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x \to 0} 2 \underbrace{\exp(x^2)}_{\to 1} \underbrace{\sqrt{x}}_{\to 0} = 0$$

NB. einige haben sich gleich von anfang an verirrt mit Hilfe von irgendwelchen erfundenen integralen. z.b $\int_0^x e^{t^2}\, dt$ " = "$2t\, e^{t^2}$*.Die Probe mit der Ableitung zeigt dass solche Formeln keinen Sinn haben. War aber nicht meine Absicht, sie in die Irre zu führen.*

Wer jedoch die Notwendigkeit der L'Hospital Regel erkannt hat und noch den Nenner richtig ableiten konnte hat schon mindestens die Hälfte kassiert.

---

3) Limes von Funktionen

$$f(x,n) = \begin{cases} (4x(1-x))^n & \text{für } x \in [0,\ 1] \\ 0 & \text{für } x \notin [0,\ 1] \end{cases} \quad \text{für } n = 1, 2, \ldots$$

a) Charakterisieren Sie $f(x,n)$ als Folge von Funktionen von x für $n = 1, 2, \ldots$ (Nullstellen, Extremwerte)

Lösung (8 Punkte): Der Großteil der Aufgabe bestand aus einer einfachen Funktionsuntersuchung. Auch hier wieder eine **äußerst ausführliche** Lösung:

Wir betrachten also für $n = 1, 2, \ldots$ $f(x,n)$ als Funktion von x. Da die Funktion außehalb des Intervalles $[0,1]$ trivialerweise den Wert 0 annimmt, konzentrieren wir uns auf den "spannenderen" Teil im Intervall $[0,1]$. Aufgrund der Linearfaktorzerlegung $4x(1-x)$ ist offensichtlich, dass:

$$f(x,n) = (4x(1-x))^n \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ oder } x = 1$$

Somit sind in diesem Intervall die Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$.
Mögliche Kandidaten für innere Extrempunkte im relevanten Intervall erhalten wir durch die Bedingung erster Ordnung. Die Ableitung nach x ergibt mittels Ketten- sowie Produktregel:

$$f'_x(x, n) = n(4x(1-x))^{n-1}(4(1-x) - 4x) = n(4x(1-x))^{n-1}(4 - 8x).$$

Mögliche Extrempunkte erfüllen die Bedingung erster Ordnung:

$$f'_x(x, n) \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow n(4x(1-x))^{n-1}(4-8x) \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \text{ oder } x_2 = 1 \text{ oder } x_3 = \frac{1}{2}$$

Beachten Sie, dass die Randpunktkandidaten $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$ unsere Nullstellen waren.
Ein einfaches Vorzeichen-Diagramm zeigt uns nun, dass $x_3 = \frac{1}{2}$ ein Maximumpunkt sein muss. Für $x \in (0, 1)$ gilt nämlich:

- $4x(1-x) > 0$ und somit auch $n(4x(1-x))^{n-1} > 0$
- $(4 - 8x) > 0$, falls $x < 0.5$ und $(4 - 8x) < 0$ falls $x > 0.5$

Insgesamt also für $x \in (0, 1)$:

$$f'_x(x, n) = n\left(4x(1-x)\right)^{n-1}(4 - 8x) \gtreqless 0 \Leftrightarrow x \lesseqgtr \frac{1}{2}.$$

Der zugehörige Maximalwert lautet

$$f(0.5, n) = 1.$$

Was sonst noch auffällt war, dass $4x(1-x) = 4x - 4x^2$ eine Parabel ist und als solche um den Extremwert $x = \frac{1}{2}$ symmetrisch ist. Somit ist aber auch $f(x, n)$ Punktsymmetrisch um $x = \frac{1}{2}$. Man beachte, daß sämtliche Überlegungen unabhängig von n gelten!

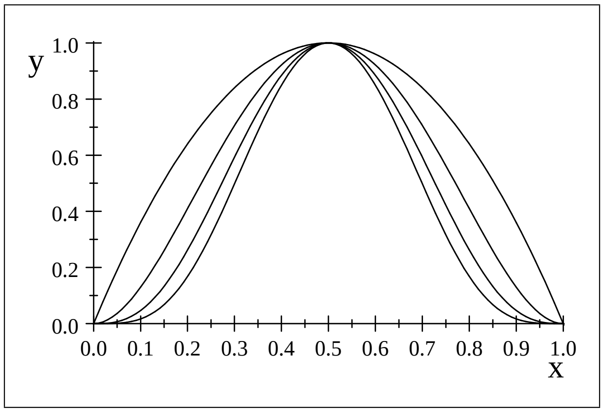
b) skizzieren Sie $f(x, n)$ als Funktion von x für $n = 1, 2, \ldots$ (Extremwerte, Symmetrie etc)

Lösung (6 Punkte):

Für jedes $n = 1, 2, \ldots$ müssen folgende Punkte auf jeden Fall eingezeichnet werden:

$$P_1 = (0, 0), \quad P_2 = (0.5, 1), \quad P_3 = (1, 0)$$

Erkennbar sollten desweiteren auch das Verhalten der Funktionsfolge sein, dass mit steigendem n die Funktionswerte an jeder Stelle x fallen. Das exakte Aussehen der Kurven, wie hier für $n = 1, 2, 3, 4$ gemalt, war jedoch nicht verlangt.



Wer nicht direkt graphisch loslegen wollte dem hätte hingegen die folgende mathematischere Überlegungen weitergeholfen:

Für $x \neq 0.5$ gilt für $x \in (0,1)$ wegen **a):**

$$0 < 4x(1-x) < 1$$

Deshalb

$$\Rightarrow 0 < f(x, n+1) = (4x(1-x))^{n+1} < (4x(1-x))^n = f(x,n) < 1.$$

In Worten: für jeden Punkt $x \neq 0.5$ fällt der zugehörige Funktionswert $f(x,n)$ mit steigendem n.

c) finden sie $\lim_{a\to\infty} f(x,a)$ (kein exakter beweis erforderlich)

Lösung (6 Punkte) :

Mithilfe der Skizze aus dem vorherigen Aufgabenteil lässt sich hier argumentieren, dass

$$\lim_{a\to\infty} f(x,a) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x = 0.5 \\ 0, & \text{ansonsten.} \end{cases}$$

Wer unbedingt mathematisch exakt statt mit seiner Vermutung aus b) argumentieren wollte, der wäre nun an einer Fallunterscheidung nicht umhergekommen:

Für $x \leq 0$ oder $x \geq 1$ gilt trivialerweise $f(x,a) = 0 \to 0$, wenn $a \to \infty$.

Für $0 < x < 0.5$ oder $0.5 < x < 1$ ist $0 < 4x(1-x) < 1$ und somit

$$\lim_{a\to\infty} (4x(1-x))^a = 0.$$

Für $x = 0.5$ ist $4x(1-x) = 1$ und somit $\lim\limits_{a\to\infty} 1^a = 1$

4) Optimierung: Gegeben die Funktionen

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$
$$g(x,y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

a) finden sie Kandidaten für Extremwerte von f unter der Nebenbedingung

$$\text{NB} : g(x,y) = 1$$

mit Hilfe der Methode von Lagrange

Lösung (14 Punkte):

$$\begin{aligned} \pounds &= x^2 + y^2 - \lambda\left(\sqrt{x} + \sqrt{y} - 1\right) \\ \frac{\partial \pounds}{\partial x} &= 2x - \lambda \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0 \\ \frac{\partial \pounds}{\partial y} &= 2y - \lambda \frac{1}{2\sqrt{y}} = 0 \\ 1 &= \sqrt{x} + \sqrt{y} \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \left.\begin{array}{c} \lambda = 4x^{3/2} = 4y^{3/2} \implies x = y \\ 1 = \sqrt{x} + \sqrt{y} \end{array}\right\} \implies x = y = \frac{1}{4},\ \lambda = 4\,(0.25)^{1.5} = 0.5$$

$$f(x^*, y^*) = 1/8$$

b) Entscheiden Sie welche Punkte lokale oder globale Maxima/Minima des Optimierungs-Problems sind (mit Begründung).

Lösung: 1. Möglichkeit (4 Punkte): $\pounds$ ist konvex
Lösung: 2. Möglichkeit (4 Punkte): f misst die Entfernung zu Punkten auf einer unbeschränkten Kurve. Da kann's höchstens ein Minimum geben.

c) Gegeben

$$f(x,y) = h\left(x^2 + y^2\right)$$
$$g(x,y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

wo $h(x)$ eine Funktion mit $h'(x) > 0$ für alle $-\infty < x < \infty$. Finden Sie Extremwerte von f unter der NB: $g(x,y) = 1$ und entscheiden Sie ob es sich um Maxima/Minima handelt (mit Begründung)

Lösung (4 Punkte): eine monoton steigende Funktion h von einer Funktion f und die Funktion f haben ihr Minimum (und Maximum) im gleichen Punkt: $f(x) \geq f(x_0)$ für alle $x \implies h(f(x)) \geq h(f(x_0))$ für alle x

d) Angenommen die Funktion hat einen Extremwert $= 1/8$. Approximieren Sie den Extremwert unter der NB: $g(x, y) = 1.1$ (mit Begründung).

Lösung (4 Punkte): $f(x^*(c), y^*(c)) = 1/8 \implies f(x^*(c + dc), y^*(c + dc)) \approx f(x^*(c), y^*(c)) + \lambda(c)\ dc$
$\lambda(1) = 1/2 \implies f(x^*(1.1), y^*(1.1)) \approx f(x^*(1), y^*(1)) + \lambda\ 0.1 = \frac{1}{8} + \frac{1}{2}0.1 = 0.175$

---

5) Differenzieren von Gleichungs-Systemen

$$\sqrt{xy}e^{u^2 v} = e$$
$$xyuv = 1$$

a) Lösen Sie folgendes Gleichungs-System für $x = 1$, $y = 1$

Lösung (5 Punkte):
$uvxy = 1 \implies uv = 1 \implies v = 1/u$
$e^{u^2 v} = e \implies e^u = e \implies u = 1 \implies v = 1$
$(x_0, y_0, u_0, v_0) = (1, 1, 1, 1)$ ist eine Lösung

b) Berechnen Sie du, dv wenn sich $x = y = 1$ um dx bzw dy ändern

Lösung (14 Punkte):

$$F(u, v, x, y) = 0 \implies dF = \frac{\partial F}{\partial u}du + \frac{\partial F}{\partial v}dv + \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = 0$$
$$G(u, v, x, y) = 0 \implies dG = \frac{\partial G}{\partial u}du + \frac{\partial G}{\partial v}dv + \frac{\partial G}{\partial x}dx + \frac{\partial G}{\partial y}dy = 0$$

$\implies$

$$1/2\sqrt{y/x}e^{u^2 v}dx + 1/2\sqrt{y/x}e^{u^2 v}dy + \sqrt{xy}e^{u^2 v}2uv\ du + \sqrt{xy}e^{u^2 v}u^2 dv = 0$$
$$yuv\ dx + xuv\ dy + xyv\ du + xyu\ dv = 0$$

einsetzen: $x = y = u = v = 1$
$\implies$

$$1/2\ e\ dx + 1/2\ e\ dy + 2e\ du + e\ dv = 0 \implies dx + dy + 4du + 2dv = 0$$
$$dx + dy + du + dv = 0$$

$\implies$

$$3\ du + dv = 0$$
$$du + dv = -dx - dy$$

$$\Longrightarrow \quad du = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -dx-dy & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{2}dx + \frac{1}{2}dy, \quad dv = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -dx-dy \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} =$$

$-\frac{3}{2}dx - \frac{3}{2}dy$

c) Berechnen Sie ungefähr $u\,(1.1,\ 1.2)\,,\ v\,(1.1,\ 1.2)$

Lösung (3 Punkte):
$u\,(1.1,\ 1.2) = u\,(1,\ 1) + du = 1 + \frac{0.2+0.2}{2} = 1.2$
$v\,(1.1,\ 1.2) = v\,(1,\ 1) + dv = 1 - \frac{3}{2}\,(0.2 + 0.2) = 0.4$